Wir kommen jetzt zum Satz von Bers (1951) [vgl. Nitsche, p. 549; Ossermann, Thm. 10.2] über die Hebbarkeit isolierter Singularitäten, der sich völlig aus der linearen Theorie heraushebt: ist D' eine Kreisscheibe um 0, aus der der Ursprung herausgenommen wurde und

$$u : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine C^2-Lösung der linearen Gleichung $\Delta u = 0$ auf D', so läßt sich die Singularität bei 0 i.a. nicht heben, d.h. ohne weitere Voraussetzungen ist es i.a. nicht möglich, u als glatte Lösung in den Ursprung hinein fortzusetzen, dies zeigt das Beispiel der Funktion

$$u(x_1, x_2) := \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

Als Vorbereitung für den Bers'schen Satz beweisen wir zunächst

SATZ 5.3: (Beschränktheit von nichtparametrischen Minimalflächen an isolierten Singularitäten)

Sei f C^2-Lösung der Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe

$$B_r(0) - \{0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < r^2\},$$

außerdem sei f stetig auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \le r^2\}$.
Dann gilt:

$$\sup_{B_r(0) - \{0\}} f \le \sup_{\partial B_r(0)} f,$$

$$\inf_{B_r(0) - \{0\}} f \ge \inf_{\partial B_r(0)} f.$$

BEMERKUNG: Im vorstehenden Satz kennt man das Randverhalten von f bis auf einen möglichen Punkt aus $\partial\Omega$, $\Omega = B_r(0) - \{0\}$. Trotzdem gilt das bekannte Randmaximumprinzip. Allgemeiner kann man $f \in C^2(\Omega)$ diskutieren, wo endlich viele Ausnahmepunkte $p_1, \dots, p_m \in \partial\Omega$ zugelassen sind. Dann bekommt man immerhin noch

$$\sup_\Omega f \leq \limsup_{\Omega \ni x \to \partial\Omega - \{p_1 \dots p_m\}} f(x),$$

und eine entsprechende Ungleichung für das Infimum.

Die übliche Anwendung sieht so aus: Ω ist ein ebenes Gebiet, das aus einem anderen Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ durch Entfernen endlich vieler innerer Punkte $p_1, \dots, p_m \in D$ entsteht, also

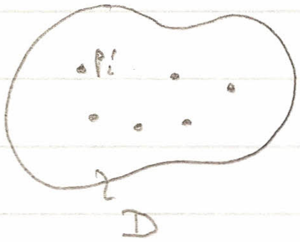
$$\Omega = D - \{p_1, \dots, p_m\}, \quad \partial\Omega = \partial D \cup \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Ist f dann z.B. aus $C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \partial D)$, so folgt

$$\limsup_{\Omega \ni x \to \partial\Omega - \{p_1 \dots p_m\}} f(x) = \sup_{\partial D} f,$$

mithin

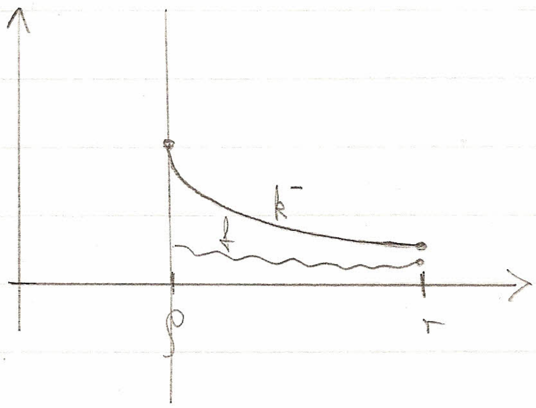
$$\sup_\Omega f \leq \sup_{\partial D} f,$$



so daß f bei Annäherung an die singulären Stellen $p_1, \dots, p_m$ beschränkt bleibt. (Nach Bers sind die Singularitäten sogar hebbar.) "Singuläre Strecken" ℓ sind verboten: Entsteht Ω aus D durch Entfernen einer eindimensionalen Menge, so ist das o.g. Maximum-Prinzip i.a. verletzt.

Beweis von Satz 5.3: Für $0 < \rho < r$ sei

$$M(\rho) := \sup_{\partial B_\rho(0)} f.$$



Sei k^-_{ρ, a_ρ} so definiert, daß

$$k^-_{\rho, a_\rho}(x) = M(r) \quad \text{auf } \partial B_r$$

erfüllt ist. Mit $g_\rho := k^-_{\rho, a_\rho}$ haben wir

$$g_\rho(x) = -\rho \cdot \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{|x|}{\rho}\right) + a_\rho,$$

also

$$g_\rho(x) = \rho\left[-\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{|x|}{\rho}\right) + \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right] + M(r),$$

$|x| \geq \rho$.

Aus $f \leq g_\rho$ auf ∂B_r bekommt man mit

Satz 5.2:

$$f(x) \leq g_\rho(x) \quad \text{auf } B_r - B_\rho.$$

Ist $x \in B_r - \{0\}$ beliebig, so gilt vorstehende Ungleichung insbesondere für alle $\rho < |x|$, unter Ausnutzung von

$$g_\rho(x) \xrightarrow[\rho \downarrow 0]{} M(r)$$

bekommt man schließlich $f(x) \leq M(r)$.

SATZ 5.4 : (Bers)

Sei $f : B_r(0) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2- Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe $B_r(0) - \{0\}$. Dann läßt sich f glatt in den Ursprung hinein fortsetzen und löst die Minimalflächengleichung auf der ganzen Kreisscheibe $B_r(0)$.

Beweis: Wir benutzen hier einen Existenzsatz für das Dirichlet Problem auf Kreisscheiben bei C^2- Randwerten für die nichtparametrische Minimalflächengleichung. Dazu sei f o.E. als C^2- Funktion in der Nähe von ∂B_r vorausgesetzt, gegebenenfalls verkleinere man einfach den Radius. Aus Satz 5.3 folgt

$$\sup_{B_r(0)-\{0\}} |f| \leq \sup_{\partial B_r(0)} |f|,$$

also die Beschränktheit von f. Sei $\tilde{f} \in C^2(\overline{B_r}(0))$ nun die C^2- Lösung der Minimalflächengleichung mit

$$\tilde{f}\big|_{\partial B_r} = f\big|_{\partial B_r}.$$

Dann gilt für $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx =$$

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} \operatorname{div} \left((f-\tilde{f}) \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) \right) dx$$

$$- \int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (f-\tilde{f}) \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx =$$

Normale

$$= \int_{\partial(B_r - B_\varepsilon)} (f - \tilde{f}) \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) \cdot \nu \; ds,$$

wobei wir die Minimalflächengleichung und den Satz von Gauß ausgenutzt haben.

Das Integral über ∂B_r ist 0 gemäß $f = \tilde{f}$ dort. Auf ∂B_ε benutzt man die Beschränktheit des Integranden ($f, \tilde{f}$ sind ja beschränkt und $|\nabla f| / \sqrt{1+|\nabla f|^2} \leq 1$, etc.), es folgt:

$$0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx$$

Wie wir uns früher aber schon überlegt haben, ist der Integrand stets ≥ 0 und „$= 0$" nur wenn $\nabla f = \nabla \tilde{f}$ im betreffenden Punkt. Speziell gilt

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx = 0,$$

mithin

$$\nabla f = \nabla \tilde{f} \quad \text{auf } B_r - \{0\},$$

also $f - \tilde{f} = \text{const}$ dort. Da aber $f - \tilde{f}$ auf $\partial B_r(0)$ verschwindet, muß $\tilde{f} = f$ bis auf den Ursprung sein, so daß man f durch $f(0) := \tilde{f}(0)$ wie gewünscht glatt fortsetzen kann.

$\blacksquare$

Für weitere Informationen über Hebbarkeitssätze vergleiche man die Bemerkungen auf Seite 98 in Osserman's Buch.

§ 6 Zur Lösung des Dirichlet Problems für die nicht parametrische Minimalflächengleichung

Literatur: 1) Nitsche, Kap. 7, § 635 ff
2) Massari & Miranda, Chapter III

Wir beschreiben den von Haar (1927, Math. Ann. 127) entwickelten Zugang zur Lösung von

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \quad \text{auf } \Omega \\ f|_{\partial\Omega} = \Phi \end{cases}$$

bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, und Randfunktion $\Phi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Es sei ausdrücklich betont, daß die Raumdimension n jetzt beliebig ≥ 2 sein darf.

Wie früher bemerkt gewinnt man Lösungen durch Minimieren des Flächenfunktionals

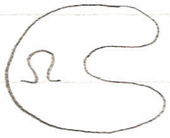
$$A(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx$$

in geeigneten Klassen von Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f|_{\partial\Omega} = \Phi$, also mit Methoden der Variationsrechnung. Dabei steht man allerdings vor dem Problem, daß zum Beispiel C^k- Minimalfolgen, $k \geq 1$, apriori nicht konvergent sein müssen, d.h. man steht vor der Notwendigkeit, $A(f)$ auf Räumen "verallgemeinerter Funktionen" zu studieren und nachträglich Regularität der Extremale zu beweisen.
Der Haar'sche Zugang ist ein "Mittelweg", bei dem die "verallgemeinerten

Funktionen" immerhin noch Lipschitz sind. In den fünfziger Jahren gab De Giorgi einen viel größer gesteckten Rahmen, indem er das Problem in Räumen $BV(\Omega)$ studierte (das sind $L^1(\Omega)$ - Funktionen, deren 1te Distributionsableitungen durch Radon Maße erzeugt werden).

Bevor wir zu den Einzelheiten kommen, wollen wir kurz einige notwendige Bedingungen für die Existenz glatter Lösungen diskutieren (BV-Lösungen findet man immer, aber deren Graphen können senkrechte Stücke haben.)

① <u>Konvexität des Definitionsgebiets Ω</u> :

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nicht konvex, hat also die Form 

, so kann man nicht für jede Vorgabe von Randwerten die Existenz einer Lösung erwarten. Seifenfilmexperimente zeigen, daß die "tatsächliche Minimalfläche" i.a. gar kein Graph über Ω ist.

② Lösungen, deren Gradient zum Rand hin unbeschränkt anwächst, muß man erwarten, wenn Ω zwar konvex, aber nicht streng konvex ist, d.h. wenn $\partial\Omega$ gerade Stücke enthält.

→ Beispiele findet man in Nitsche's Buch.

Man wird also <u>strenge Konvexität</u> von Ω fordern müssen: es gibt eine Kugel $\overline{B}_r$ (mit festem Radius r), die man von innen an jeden Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ legen kann und die $\partial\Omega$ genau nur in diesem Randpunkt berührt. Anschaulich heißt dies, daß $\partial\Omega$ überall gleich stark gekrümmt ist.

Der Haarsche Zugang vollzieht sich nun in mehreren Schritten, wir beginnen mit

I. Die Klasse Lip(Ω) und erste Eigenschaften des Funktionals A

Hier sei Ω zunächst nur ein beschränktes konvexes Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION: a) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz stetig auf Ω, falls es eine Konstante $M \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x-y|$$

für alle $x, y \in \Omega$. Die kleinste Zahl M mit dieser Eigenschaft heißt Lipschitz Konstante $\mathrm{Lip}(f)$ von f.

b) Der Raum Lip(Ω) besteht aus allen beschränkten Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die gleichzeitig einer Lipschitz Bedingung genügen.

Für Lipschitz Funktionen gilt der berühmte

SATZ von Rademacher: Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig, so existiert in Lebesgue fast jedem Punkt die Ableitung von f. Man hat in den Differenzierbarkeitsstellen x die Abschätzung

$$|\nabla f(x)| \leq \mathrm{Lip}(f),$$

wobei $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x)\right)$ wie üblich den Vektor der partiellen Ableitungen bezeichnet. ∎

Den Beweis findet man bei [Federer, Geometric Measure Theory] oder auch in der Monographie von [Simon, Lectures on Geometric Measure Theory].

Nach diesem Satz macht die Definition

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx$$

auch für Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Sinn, die nur Lipschitz stetig auf dem Bereich Ω sind. Der Gradient existiert ja außerhalb einer Lebesgueschen Nullmenge, und diese spielt beim Integrieren keine Rolle. Es gilt

<u>SATZ 6.1:</u> i) A_Ω ist ein <u>konvexes</u> Funktional auf $Lip(\Omega)$.

ii) Ist $\mathcal{C} \subset Lip(\Omega)$ eine konvexe Teilmenge, die nicht zwei nur durch eine Konstante verschiedene Funktionen enthält, so ist A_Ω auf $\mathcal{C}$ sogar <u>streng konvex</u>. (Eine solche Klasse $\mathcal{C}$ kann z.B. $\{ f \in Lip(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \Phi,\ f \text{ stetig auf } \overline{\Omega} \}$ mit gegebener Randfunktion Φ sein.)

iii) A_Ω ist <u>unterhalbstetig</u> bzgl. gleichmäßiger Konvergenz bei beschränkten Lipschitz Konstanten, d.h.:

Gilt $f_m \longrightarrow f$ gleichmäßig auf Ω und $\sup_m Lip(f_m) < \infty$, so folgt

$$A_\Omega(f) \leq \liminf_{m\to\infty} A_\Omega(f_m).$$

Beweis: (i) Man hat für $f, g \in Lip(\Omega)$ und $0 \leq t \leq 1$

$$A_\Omega\left(t f + (1-t)\cdot g\right) = \int_\Omega \sqrt{1+|t\cdot\nabla f+(1-t)\nabla g|^2}\, dx =$$

$$\int_\Omega \| t\cdot(1,\nabla f) + (1-t)(1,\nabla g)\| \, dx ,$$

wo $\|\cdot\|$ ausnahmsweise für die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$ steht.

Für beliebige Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\| t\cdot \xi + (1-t)\eta \| \le t\,\|\xi\| + (1-t)\,\|\eta\|$$

mit „=" genau nur für $t=0$ oder $t=1$ oder $\xi=\eta$.

Also ist

$$A_\Omega\left(t f + (1-t) g\right) \le t\cdot \int_\Omega \|(1,\nabla f)\|\, dx + (1-t)\int_\Omega \|(1,\nabla g)\|\, dx$$

$$= t\cdot A_\Omega(f) + (1-t)\, A_\Omega(g)$$

mit „=" nur für $t=0$, $t=1$ oder $\nabla f = \nabla g$ f.ü.

Daraus liest man die Konvexität von A_Ω ab.

ii) Nehmen wir $0<t<1$ und $f, g \in \mathcal{C}$ an, so folgt aus

$$A_\Omega\left(t f + (1-t) g\right) = t\cdot A_\Omega(f) + (1-t)\, A_\Omega(g)$$

gemäß obiger Rechnung $\nabla f = \nabla g$ fast überall. Für Lipschitz Funktionen gilt nun aber wie im C^1-Fall: $\nabla \varphi = 0$ f.ü. impliziert $\varphi = \text{const}$. Mithin folgt aus der Wahl von $\mathcal{C}$: $f=g$